Ecuaciones Diferenciales para Circuitos Eléctricos

Aplicación de una Ecuación Diferencial a un circuito eléctrico conectado en serie del tipo RC

Leyendo éste artículo aprenderás a aplicar las ecuaciones diferenciales a un circuito eléctrico tipo RC conectado en serie, y resolverás, utilizando un método paso a paso, el circuito RC, para encontrar sus variables de corriente $i(t)$ y carga $q(t)$. Además de entender cómo realizar el analisis de un circuito eléctrico de este tipo. Utilizaremos de nuevo la misma metodología del artículo: *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas a Circuitos Eléctricos*, que consta de los siguientes 3 pasos.

- Modelaremos el Circuito Electrico con Ecuaciones Diferenciales
- Solucionaremos la Ecuacion Diferencial resultante
- Graficaremos la corriente encontrada.

Para el Modelado de éste Circuito Electrico, utilizaremos las leyes de Kirchoff vistas en el artículo *Circuitos Eléctricos y Ecuaciones Diferenciales* solo que ahora el circuito a estudiar es del tipo RC.

Para la Solucion de la Ecuacion Diferencial aplicaremos la regla de los 4 pasos para la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden que aquí hemos utilizado.

Utilizaremos MATHEMATICA para la graficación de resultados.

Finalmente, compararemos los modelos resultantes para la simulación de circuitos del tipo RC con los modelos obtenidos para los circuitos del tipo RLC para poder entender su relación común, ya que parten del mismo criterio. Ver artículo: *Circuitos Eléctricos y Ecuaciones Diferenciales*.

Para esto resolveremos un ejercicio.

Ejercicio resuelto: Capitulo 3.1 Libro Dennis G. Zill Ed 7ma,(Problema 31).

PROBLEMA

Se aplica una fuerza electromotriz de 100V a un circuito en serie RC en el que la resistencia es de 200 ohms y la capacitancia de 10^{-4} farads. Determine la carga $q(t)$ del capacitor, si $q(0) = 0$. Encuantre la corriente $i(t)$. El circuito esta descrito en la **Figura 1**.

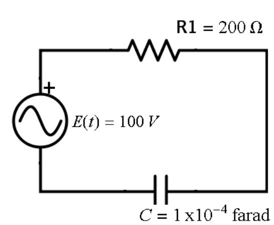

Figura 1. Circuito en serie RC

Modelado del Circuito Electrico con Ecuaciones Diferenciales

Obtengamos los modelos para el circuito representado en la **Figura 1**. Dicho modelo matemático proviene de las ley de Kirchoff.

En este caso, como queremos encontrar un valor (la carga $q(t)$), en un *circuito cerrado o malla* utilizaremos para modelar el circuito la LEY DE MALLAS.

Para esto recordamos como representamos matemáticamente, en circuitos electricos, a los Inductores y las Resistencias, así como las definiciones de caídas de voltaje para cada elemento:

Elementos del Circuito	**Caídas de Voltaje**	**Caídas de Voltaje**
	en función de $i(t)$	*en función de* $q(t)$
Inductor	$L\frac{di}{dt}$	$=L\frac{d^2q}{dt^2}$
Resistor	iR	$=R\frac{dq}{dt}$
Capacitor	$\frac{1}{C}q$	

Tabla 1. Tabla de caídas de voltaje para cada elemento del circuito descrito en la Figura 1, expresadas en función de la corriente $i(t)$ y en función de la carga $q(t)$

Entonces, aplicando la ley de mallas de kirchoff al circuito de la **Figura 1**, para las caídas de voltaje en función de la carga $q(t)$, tenemos:

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=E(t) \tag{1}$$

Donde c, R son constantes conocidas como la capacitancia y resistencia, respectivamente. La carga $q(t)$ se llama también respuesta del sistema.

En realidad esta ecuación (1), no es más que la ecuación (2) del artículo: *Circuitos Eléctricos y Ecuaciones Diferenciales* sin la caída de voltaje que genera el inductor; dicha ecuación es:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=E(t) \tag{2}$$

Donde, $i(t)=\frac{dq}{dt}$.

Las versiones de circuitos en serie del tipo LR y RC, son simplemente contracciones de la ecuación (2).

Dicho sea de paso, y como conocimiento general que ayude a entender más el modelado de circuitos elćtricos, te menciono que para convertir la ecuación (2) en una Ecuación Diferencial lineal necesitamos llenar los requisitos que delimitan la condición de linealidad de una ED, los cuales son:

- La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado.
- Los coeficientes de las derivadas y de la función dependiente, dependen a la mucho de la variable independiente.

Para lograr lo anterior en la ecuación (2), necesitamos, escribir una de las dos variables dependientes de t, las cuales son: i y q, en función de la otra, esto lo conseguimos haciendo uso de la definición física de corriente electrica, la cual enuncia que la corriente es el cambio de carga electrica en el tiempo, es decir:

$$i=\frac{dq}{dt} \tag{3}$$

Entonces, sustituyendo (3) en (2) y realizando las derivaciones necesarias, obtenemos:

$$L\frac{d^2q}{dq^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t) \tag{4}$$

o

$$L\,\frac{d^2i}{di^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\,i=E(t)$$

Donde para nuestrso fines, utilizaremos (4), en una de sus formas reducidas, pues solo tenemos dos elementos conectados en serie, de modo que, utilizamos:

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}\,q=E(t) \tag{5}$$

Solucion para encontrar la carga del circuito RC conectado en serie

Para nuestro caso la ecuacion diferencial a resolver, segun la ecuacion (1) y sustituyendo los valores del problema planteado, es:

$$200\,\frac{dq}{dt}+\frac{1}{1\times 10^{-4}}q=100 \tag{6}$$

Resolviendo la ecuación (6) por el *método de los 4 pasos*:

I. Forma estándar:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=g(x)\ \Rightarrow\ \frac{dq}{dt}+50\,q=\frac{1}{2}$$

II. Factor Integrante:

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)\,dx} &= e^{\int\,50\,dt}\\ &= e^{50\int\,dt}\\ &= e^{50\,t}\end{aligned}$$

III. Forma de la solucion:

$$y=y_c+y_p\ \Rightarrow\ q(t)=q\,\mathrm{tr}(t)+q\,\mathrm{ps}(t)$$

$$\begin{aligned} y_c=Ce^{\int P(x)dx}\ &\Rightarrow\ q\,\mathrm{tr}(t)=Ce^{-\int\,50\,dt}\\ &\Rightarrow\ q\,\mathrm{tr}(t)=Ce^{-50\,t}\end{aligned}$$

Donde: $q\mathrm{tr}$ es la carga transitoria del capacitor en el circuito RC en serie.

$$\begin{aligned} y_p=\frac{1}{e^{\int P(x)\,dx}}\int e^{\int P(x)\,dx}f(t)dx\ &\Rightarrow\ qs(t)=\frac{1}{e^{50t}}\int e^{50t}*\frac{1}{2}\,dt\\ &\Rightarrow\ qs(t)=\frac{1}{2*50*e^{50t}}\int e^{50t}\,(50)dt\\ &\Rightarrow\ qs(t)=\frac{1}{100*e^{50t}}\int e^{50t}\,(50)\,dt\\ &\Rightarrow\ qs(t)=\frac{1}{100}*e^{-50\,t}[e^{50\,t}]\\ &\Rightarrow\ qs(t)=\frac{1}{100}\end{aligned}$$

Donde: qs es la carga estacionaria del capacitor.

Por tanto la carga (total en el circuito), buscada es:

$$\begin{aligned} q(t) &= q\,\mathrm{tr}(t) + q\,s(t) \\ &= Ce^{-50t} + \frac{1}{100} \end{aligned} \tag{7}$$

Para encontrar el valor de C utilizamos los valores iniciales $q(0)=0$, es decir cuando el tiempo t es 0 la carga q en el capacitor es 0 tambien (como en un circuito abierto).

Por tanto, sustituyendo estos valores en la ecuación para la corriente resultante del circuito (4), tenemos:

$$\begin{aligned} q(t) &= Ce^{-50t} + \frac{1}{100} \\ 0 &= Ce^{-50\,(0)} + \frac{1}{100} \\ 0 &= C(1) + \frac{1}{100} \\ 0 &= C + \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Esto implica que:

$$C = -\frac{1}{100}$$

De donde la Carga en el capacitor buscada es:

$$q(t) = -\frac{1}{100}\,e^{-50t} + \frac{1}{100} \tag{8}$$

Es evidente, observando la ecuación (5), que cuando $t \to 0$, $q(t) = 0$, este resultado se hace más evidente cuando graficamos la corriente $i(t)$, resultante.

Graficación de la carga encontrada.

El código en MATHEMATICA para graficar la carga resultante es:

Algoritmo 1

```
Clear[«Global‘*»]
qp[t_]=-1/100*Exp[-50 t]+1/100;
Plot[qp[t],{t,0,Pi/20},PlotRange ->{0,0.02}]
```

La gráfica resultante se muestra en la **Figura 2.**

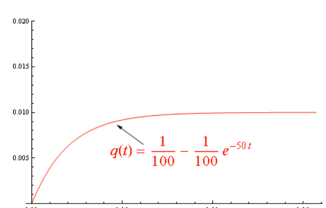

Figura 2. Carga en el Capacitor

Obteniendo la corriente $i(t)$, del circuito RC en serie

Para este propósito utilizaremos la ecuación (2):

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\,q = E(t)$$

En su forma reducida:

$$Ri+\frac{1}{C}q=E(t)$$

De modo que sustituyendo los valores que conocemos, tenemos:

$$200i+\frac{1}{1\times 10^{-4}}\left[-\frac{1}{100}e^{-50t}+\frac{1}{100}\right]=100$$

Donde: $q(t)=-\frac{1}{100}e^{-50t}+\frac{1}{100}$,

De modo que despejando $i(t)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
200i+\frac{1}{1\times 10^{-4}}\left[-\frac{1}{100}e^{-50t}+\frac{1}{100}\right] &= 100\\
i(t)+\frac{10000}{200}\left[-\frac{1}{100}e^{-50t}+\frac{1}{100}\right] &= \frac{1}{2}\\
i(t)+50\left[-\frac{1}{100}e^{-50t}+\frac{1}{100}\right] &= \frac{1}{2}\\
i(t)-\frac{1}{2}e^{-50t}+\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\\
i(t)-\frac{1}{2}e^{-50t} &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
i(t) &= \frac{1}{2}e^{-50t}
\end{aligned}$$

Por tanto la corriente en el circuito, es:

$$i(t)=\frac{1}{2}e^{-50t} \tag{9}$$

Donde es evidente que cuando $t\to 0$ la corriente en el circuito tiende a $i(t)=\frac{1}{2}$, pero más importante es notar que cuando $t\to\infty$, la corriente $i(t)\to 0$, lo cual se hace evidente al graficar la corriente resultante, como lo hacemos a continuación en MATHEMATICA

Algoritmo 2

```
Clear[«Global‘*»]
ip[t_]=1/2*Exp[-50 t];
Plot[ip[t],{t,0,Pi/20},PlotRange ->{-0.6,0.1}]
```

La gráfica de la corriente en el circuito se muestra en la **Figura 3**.

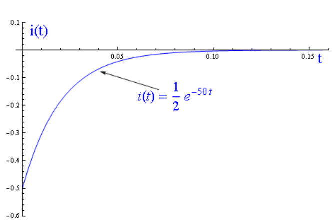

Figura 3. Corriente en el circuito **RC**

La conclusión más importante, tal vez, es notar que cuando el capacitor se carga, mientras el voltaje suministra corrinte al circuito, es decir, mientras $t\to\infty$, la corriente total tiende a cero, es decir $i(t)\to 0$, lo cual se hace evidente al comparar las figuras 2 y 3.