Función Error: solución de una Ecuación Diferencial expresada como Función Error

Como utilizar la función error $\mathrm{e}rf\left(x\right)$, para expresar una solución o función que incluya una integral no elemental.

Al finalizar el artículo podrás utilizar y entender fácilmente cómo implementar la función error para expresar funciones con integrales no elementales.

La utilidad de ésta función (error) es despejar nuestra función de salida de la integral no elemental; esto lo logramos mediante recordar que:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\text{®}}$

Lo cual sabemos del cálculo multivariable y que podemos integrar utilizando integrales dobles y un cambio de variables a coordenadas polares para comprobar, siga este link.

De modo que si tomamos la mitad de la función en 1, tenemos:

(2) $\frac{\sqrt{\text{®}}}{2} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Por tanto, utilizando la propiedad de la unión de intervalos:

(3) $\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\text{®}}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\text{®}}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\text{®}}}\left(\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t^2\right) = 1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\text{®}}}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\sqrt{\text{®}}}\int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$

De donde:

(4) $\mathrm{e}rf\left(x\right) = \frac{2}{\sqrt{\text{®}}}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

(5) $\mathrm{e}rfc\left(x\right) = \frac{2}{\sqrt{\text{®}}}\int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Una opción alterna para relacionar la ecuación (2) con las integrales no elementales, es:

$\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ es equivalente a $\lim_{x\to\infty}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Donde, habiendo considerado la veracidad de la ecuación (2), solo reataría comprobar que:

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\text{®}}}{2}$$

Una vez explicado brevemente (y de una manera para invocar la intuición) el origen de la función error, procedemos igual que siempre a solucionar nuestra ED lineal por medio de los 4 pasos:

Tenemos:

Encontrar la solución del PVI:

$$y' - 2xy = 1, \quad y(1) = 1$$

Buscamos:

Solución en términos de la función error.

Ejercicios 2.3 Libro Dennis G. Zill, Ed 7ma. (Problema 37).

Pasos:

I. Forma estándar de la ED a resolver: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)\,y = f(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 1$$

II. Encontramos el factor integrante: $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$, $\qquad P(x) = 2x$

$$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2\int x\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x^2}$$

III. Encontramos la familia de soluciones del sistema homogéneo asociado:

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\,y = 0$, $\qquad y_C = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ (Ecuaciones Generales)

$$y_c = C_1\mathrm{e}^{2\int x\mathrm{d}x}$$

$$= C_1\mathrm{e}^{x^2}$$

IV. Encontramos una solución particular a partir del sistema LINEAL no homogéneo:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = f(x), \qquad y_p = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int e^{\int P(x)dx} f(x)\,dx$$ (Ecuaciones Generales)

$$y_p = \frac{1}{e^{-x^2}} \int e^{-x^2} (1)\,dx$$

$$= e^{x^2} \int e^{-x^2} dx$$

Por tanto, la solución del PVI es: $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 e^{x^2} + e^{x^2} \int e^{-x^2} dx$$

Utilizamos ahora la función error y el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int e^{-x^2} = \int_0^x e^{-t^2} dt$$ TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Por tanto, considerando la ecuación (4) y despejando la integral no elemental, tenemos:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\text{®}}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\text{®}}}{2} erf(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Por tanto, La solución del PVI en términos de la función error, es:

$$y_p = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$= e^{x^2} \left[\frac{\sqrt{\text{®}}}{2} erf(x) \right] = \frac{\sqrt{\text{®}}}{2} e^{x^2} erf(x)$$

$$y_c = c_1 e^{x^2}$$

De donde:

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 e^{x^2} + \frac{\sqrt{\circledR}}{2} e^{x^2} erf\left(x\right)$$

Sustituyendo los valores iniciales:

<u>Tenemos:</u>

$$1 = c_1 e^{(1)^2} + \frac{\sqrt{\circledR}}{2} e^{(1)^2} erf\left(1\right)$$

$$\Rightarrow 1 = c_1 e + \frac{\sqrt{\circledR}}{2} e erf\left(1\right)$$

$$\Rightarrow 1 = e\left(c_1 + \frac{\sqrt{\circledR}}{2} erf\left(1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} = c_1 + \frac{\sqrt{\circledR}}{2} erf\left(1\right)$$

$$\Rightarrow c_1 = e^{-1} - \frac{\sqrt{\circledR}}{2} erf\left(1\right)$$

<u>De modo que la solución del PVI, es:</u>

$$y = \left(e^{-1} - \sqrt{\frac{\circledR}{2}} erf\left(1\right)\right) e^{x^2} + \frac{\sqrt{\circledR}}{2} e^{x^2} erf\left(x\right)$$

$$y = e^{-1+x^2} - \frac{\sqrt{\circledR}}{2} e^{x^2} erf\left(1\right) + \frac{\sqrt{\circledR}}{2} e^{x^2} erf\left(x\right)$$

Para calcular los valores de la función error en MATHEMATICA podemos utilizar el siguiente código:

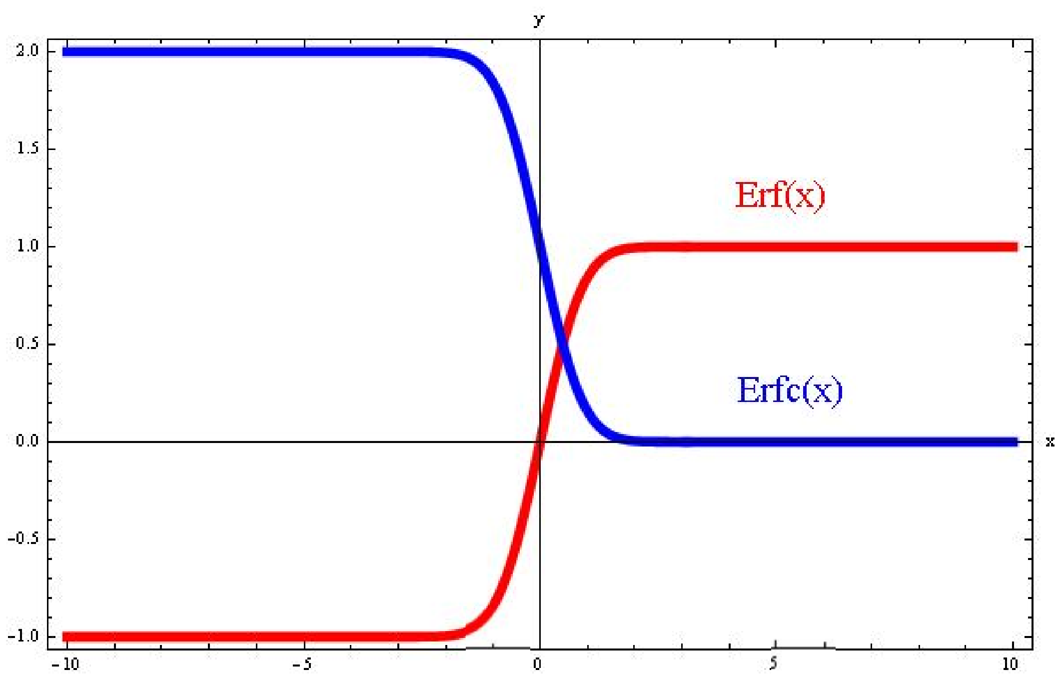
```
Limit[Integrate[Exp[-t^2],{t,0,x}],x→Infinity]
TableForm[Table[{x,Erf[x]},{x,-1,2,0.05}],
 TableHeadings→{None,{"x","Erf(x)"}}]
Plot[{Erf[x],Erfc[x]},{x,-10,10}]
Plot[{Erf[x],Erfc[x]},{x,-1,1}]
Plot[{Erf[x],Erfc[x]},{x,0,2}]
```

Los valores obtenidos, se muestran en la siguiente tabla:

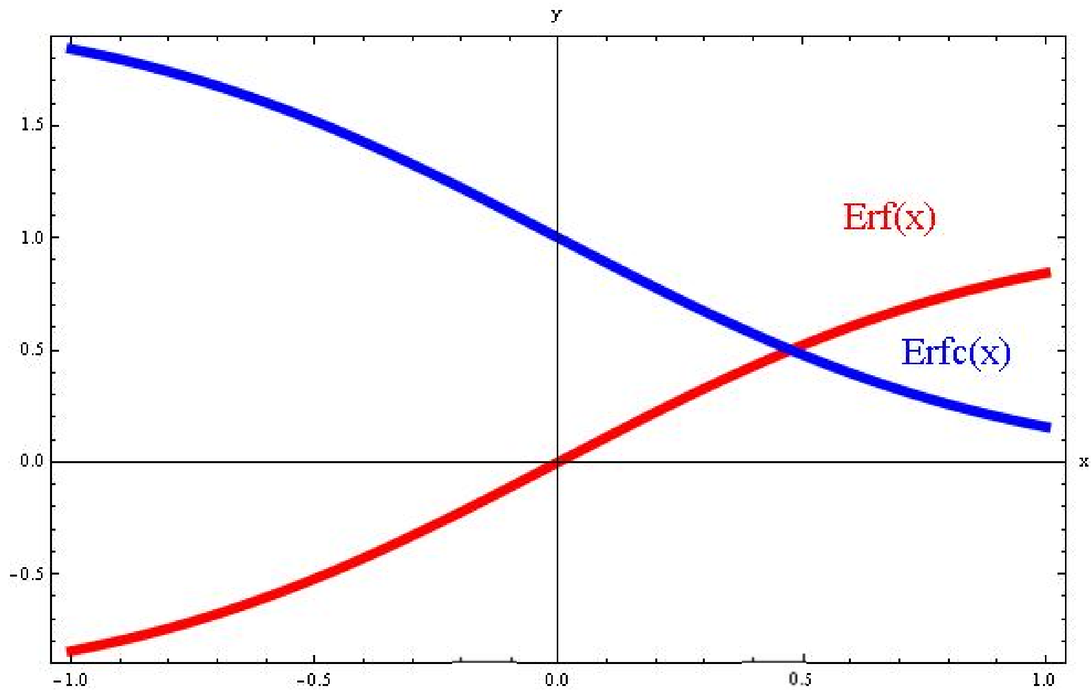
	x	*Erf(x)*
1	-1	-0.842701
2	-0.95	-0.820891
3	-0.9	-0.796908
4	-0.85	-0.770668
5	-0.8	-0.742101
6	-0.75	-0.711156
7	-0.7	-0.677801
8	-0.65	-0.642029
9	-0.6	-0.603856
10	-0.55	-0.563323
11	-0.5	-0.5205
12	-0.45	-0.475482
13	-0.4	-0.428392
14	-0.35	-0.379382
15	-0.3	-0.328627
16	-0.25	-0.276326
17	-0.2	-0.222703
18	-0.15	-0.167996
19	-0.1	-0.112463
20	-0.05	-0.056372
21	0	0
22	0.05	0.056372
23	0.1	0.112463
24	0.15	0.167996
25	0.2	0.222703
26	0.25	0.276326
27	0.3	0.328627
28	0.35	0.379382
29	0.4	0.428392
30	0.45	0.475482
31	0.5	0.5205
32	0.55	0.563323
33	0.6	0.603856
34	0.65	0.642029
35	0.7	0.677801
36	0.75	0.711156
37	0.8	0.742101
38	0.85	0.770668
39	0.9	0.796908
40	0.95	0.820891

41	1	0.842701
42	1.05	0.862436
43	1.1	0.880205
44	1.15	0.896124
45	1.2	0.910314
46	1.25	0.9229
47	1.3	0.934008
48	1.35	0.943762
49	1.4	0.952285
50	1.45	0.959695
51	1.5	0.966105
52	1.55	0.971623
53	1.6	0.976348
54	1.65	0.980376
55	1.7	0.98379
56	1.75	0.986672
57	1.8	0.989091
58	1.85	0.991111
59	1.9	0.99279
60	1.95	0.994179
61	2	0.995322

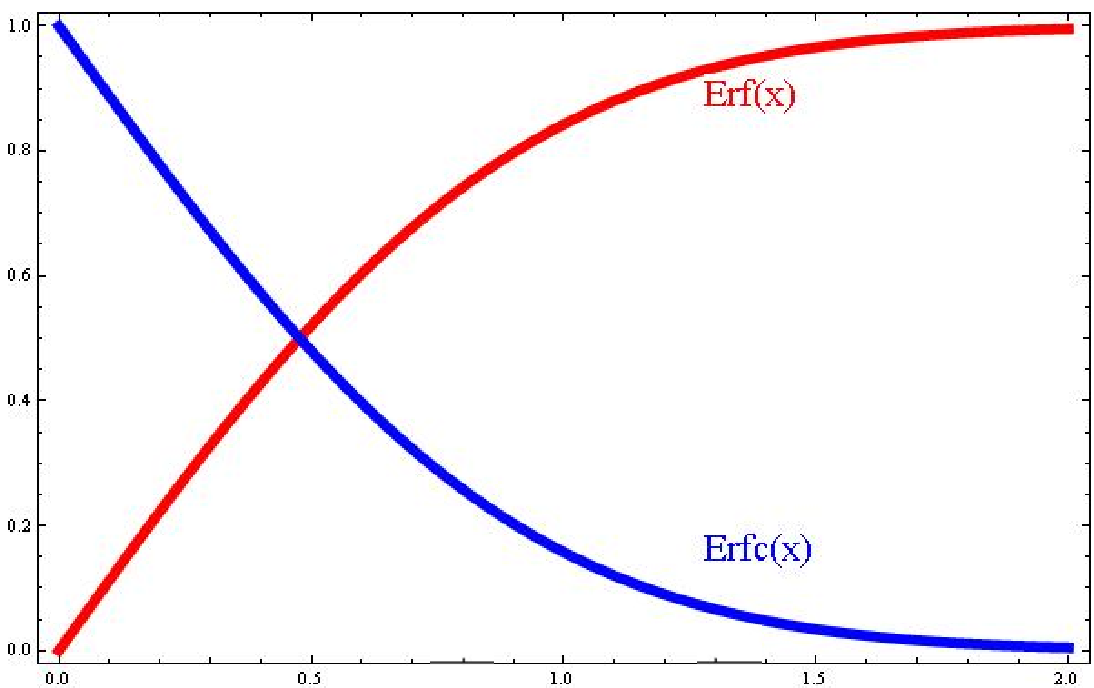
Por último, graficamos los valores obtenidos:



El intervalo de la gráfica es de $-10 \leq x \leq 10$ y su rango $-1 \leq y \leq 2$.



El intervalo de la gráfica es de $-1 \leq x \leq 1$ y su rango $-1 \leq y \leq 2$.



El intervalo de la gráfica es de $0 \leq x \leq 2$ y su rango $0 \leq y \leq 1$.